Υποομάδες και κυκλικότητα

Ν. Λυγερός

Η υποομάδα H μιας ομάδας G χαρακτηρίζεται από την κλειστότητα του συνόλου ως προς την πράξη της ομάδας. Κατά συνέπεια, η σχέση $H \cdot H \subset H$ επαρκεί ως κριτήριο. Ενώ η κυκλικότητα της ομάδας προέρχεται από τη μοναδικότητα του γεννήτορα. Μέσω αυτών των εννοιών, το εξής θεώρημα είναι φυσιολογικό.

Θεώρημα: Κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.

Με άλλα λόγια, έχουμε μία κληρονομικότητα προς τα κάτω, πράγμα το οποίο δεν ισχύει για όλες τις ομάδες π.χ. τις συμμετρικές. Η απόδειξη του θεωρήματος δεν εξαρτάται από το μέγεθος της ομάδας, η οποία μπορεί να είναι και άπειρη. Εξετάζουμε πρώτα αν η υποομάδα έχει μόνο ένα στοιχείο. Όπως αυτό είναι αναγκαστικά το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας, η υποομάδα είναι κυκλική. Αν $\#H > 1$. Επιλέγουμε το μικρότερο φυσικό αριθμό ώστε $a^m \in H,\ 0 < m < n$ όπου n είναι η τάξη της ομάδας G. Όπως $< a >= G$, έχουμε $< a^m > \subset H$. Έστω ένα τυχαίο στοιχείο a^k όπου $0 \le k < n$. Μέσω της ευκλείδειας διαίρεσης, έχουμε $k = m.p + r$ όπου $0 \le r < m$, και $p \in Z$. Κατά συνέπεια $a^r = a^{k-mp} = a^k (a^m)^{-p} \in H$. Όπως m s είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός, έχουμε $r = 0$, άρα $k = mp$.

$$a^k = (a^m)^p \in < a^m >$$

πράγμα που σημαίνει $< a^m >= H$.

Στην ουσία, η κυκλικότητα μεταβιβάζεται μέσω του γεννήτορα διότι εκεί βρίσκεται η πληροφορία της ομάδας, δίχως αυτό να σημαίνει ότι είναι απόλυτη εφόσον μία κυκλική ομάδα μπορεί να έχει περισσότερους του ενός γεννήτορες. Αυτή η παρατήρηση μάς οδηγεί στο εξής ερώτημα του χαρακτηρισμού του γεννήτορα, στο οποίο απαντά αποτελεσματικά το εξής θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω $(G,*)$ μία κυκλική ομάδα με $\#G = k$ και γεννήτορα το α. Τότε το στοιχείο $a^k \in G$ είναι γεννήτορας της G αν και μόνο αν ο αριθμός k είναι σχετικά πρώτος με τον αριθμό n.

Είναι ένας αισθητικός τρόπος για να αντιληφθούμε τη σπουδαιότητα των πρώτων αριθμών στην έννοια της κυκλικότητας. Επιπλέον, αυτό το θεώρημα μάς επιτρέπει να ερευνήσουμε αλγοριθμικά το χώρο των υποομάδων μίας κυκλικής ομάδας. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε και το δικτυωτό διάγραμμα της ομάδας. Το ελάχιστο στοιχείο και μάλιστα άτομο είναι η υποομάδα που αποτελείται μόνο και μόνο από το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας. Το μέγιστο στοιχείο του δικτυωτού διαγράμματος είναι όλη η ομάδα. Δομικά το δικτυωτό διάγραμμα είναι ένα σύνολο με μερική διάταξη (το λεγόμενο poset i.e. partially ordered set). Έτσι το δικτυωτό διάγραμμα αναδεικνύει τη συνδυαστική πληροφορία της ομάδας και δίνει μία νέα εικόνα. Με άλλα λόγια, το δικτυωτό διάγραμμα είναι μία οπτικοποίηση των αλγεβρικών σχέσεων μεταξύ των υποομάδων της αρχικής ομάδας. Αυτό σημαίνει επιπλέον ότι έχουμε μέσω των κυκλικών ομάδων μία άλλη εικόνα και των φυσικών αριθμών. Αλλά ας εξετάσουμε και πάλι το δεύτερο θεώρημα στην περίπτωση όπου η τάξη της ομάδας είναι πρώτος αριθμός. Τότε οποιοδήποτε στοιχείο a^k είναι γεννήτορας εφόσον ο αριθμός n είναι σχετικά πρώτος με όλους τους άλλους αριθμούς που διαφέρουν από τον ίδιο. Έτσι αντιλαμβανόμαστε ότι μία τέτοια κυκλική ομάδα δεν έχει υποομάδα (γνήσια). Αυτή η πληροφορία δεν είναι μόνο ενδιαφέρουσα από μόνη της, αλλά και διότι μας ανοίγει το δρόμο για την επινόηση του θεωρήματος του Lagrange σ' ένα πολύ γενικότερο πλαίσιο.