Νέα υπολογιστικά αποτελέσματα στη θεωρία των Somas του Καραθεοδωρή

Ν. Λυγερός

Εισαγωγή:

Στο βιβλίο του με τίτλο *Measure and Integration*, ο Καραθεοδωρή γράφει το εξής:
Starting with the somas and making use of the operations of conjunction and intersection, i.e. the operations of Boolean algebra, we form new somas, which are taken to be polynomials in $A_1, ..., A_p$.

Equations $A_k = S_{j_1} + S_{j_2} + ... + S_{j_q}$ show that all these polynomials can be represented as sums of the somas $S_0, S_1, ... S_n$, where, however, the soma S_0 never occurs. On the other hand, each of the somas $S_1, ... S_n$ is such a polynomial and is obtained by expanding the formula $S_j = A_{k_1} ... A_{k_a} \left(M + A_{m_1}\right) .... \left(M + A_{m_b}\right)$
which follows from $A_k^{'} = M + A_k = M - A_k$ and
$S_j = A_{k_1} A_{k_2} ... A_{k_a} A'_{m_1} A'_{m_2} ... A'_{m_b} \qquad a + b = p$

If none of the decomposition somas S_j is empty, then there are:

$$X(p) = 2^{2^p - 1} - 1$$

distinct polynomials that can be formed by means of the somas $A_1, ..., A_p$.

These numbers grow very rapidly: we find that

$$X(2) = 7, X(3) = 127, X(4) = 32767$$

and $X(p)$ is a ten digit number. Thus, the formulas for these polynomials cannot be written out *in extenso* even when the number of somas is small. Of great importance, however, is the fact that these formulas are the same as those for the subsets of a set with $2^p - 1$ elements.

Κατ' αρχήν, ένας απλός υπολογισμός επιβεβαιώνει τα λεγόμενα του Καραθεοδωρή όσον αφορά στα μεγέθη των X (p).

$p = 2, X(2) = 7$

$p = 3, X(3) = 127$

$p = 4, X(4) = 32767$

$p = 5, X(5) = 2147483647$ (έχει όντως 10 ψηφία)

$p = 6, X(6) = 9223372036854775807$

$p = 7, X(7) = 170141183460469231731687303715884105727$

Όταν ο Καραθεοδωρή επινόησε τη θεωρία των Somas, ουσιαστικά δεν υπήρχαν οι υπολογιστές. Κατά συνέπεια, δεν ήταν δυνατόν να σκεφτεί ότι οι υπολογιστές θα μπορούσαν να λύσουν εν μέρει το πρόβλημα της απαρίθμησης των Somas τουλάχιστον για τις μικρές τάξεις. Ο στόχος μας σ' αυτό το άρθρο είναι να υλοποιήσουμε υπολογιστικά τις εκτιμήσεις του Καραθεοδωρή. Σε αυτό το πλαίσιο θα κινηθούμε έχοντας όχι μόνο υπόψη την αλγεβροποίηση της θεωρίας μέτρου (βλ. Opus 3427), αλλά και τη θεωρία ομάδων μέσω των αυτομορφισμών των συνόλων με μερική διάταξη (βλ. Opus 3425).

Για δύο Somas έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

Σημειώνουμε τα: S_1, S_2, S_4 και έχουμε:

$S_3 = S_1 + S_2$, $S_5 = S_1 + S_4$, $S_6 = S_2 + S_4$, $S_7 = S_1 + S_2 + S_4$

Οι πίνακες των S_i είναι οι εξής:

$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$S_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$S_2 \sim S_4$

$S_3 \sim S_5$ Μέσω της συμμετρικής ομάδας

Κατά συνέπεια έχουμε 5 κλάσεις:

$S_1 \to 1 S_2 \to 2 S_3 \to 3 S_4 \to 4 S_5 \to 5 S_6 \to 6 S_7 \to 7$

Με τον ίδιο τρόπο για τρία Somas έχουμε τα εξής αποτελέσματα.

Σημειώνουμε τα $S_1, S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}$ και S_{64} και έχουμε:

$S_3 = S_1 + S_2, S_5 = S_1 + S_4, S_6 = S_2 + S_4, S_7 = S_1 + S_2 + S_4, S_9 = S_1 + S_8, S_{10} = S_2 + S_8$

$S_{11} = S_1 + S_2 + S_8, S_{12} = S_4 + S_8, S_{13} = S_1 + S_4 + S_8, S_{14} = S_2 + S_4 + S_8, ...$

$S_{125} = S_1 + S_4 + S_8 + S_{16} + S_{32} + S_{64}, S_{126} = S_2 + S_4 + S_8 + S_{16} + S_{32} + S_{64},$

$S_{127} = S_1 + S_2 + S_4 + S_8 + S_{16} + S_{32} + S_{64}$

Οι πίνακες των S_i είναι οι εξής:

S1
0 0
0 0

0 0
0 1

S2
0 0
0 0

0 0
1 0

S3
0 0
0 0

0 0
1 1

S4
0 0
0 0

0 1
0 0

S5
0 0
0 0

0 1
0 1

S6
0 0
0 0

0 1
1 0

S7
0 0
0 0

0 1
1 1

S8
0 0
0 1

0 0
0 0

S9
0 0
0 1

0 0
0 1

S10
0 0
0 1

0 0
1 0

S11
0 0
0 1

0 0
1 1

S12
0 0
0 1

0 1
0 0

S13
0 0
0 1

0 1
0 1

S14
0 0
0 1

0 1
1 0

S15
0 0
0 1

0 1
1 1

S16
0 1
0 0

0 0
0 0

S17
0 1
0 0

0 0
0 1

S18
0 1
0 0

0 0
1 0

S19

0 1
0 0

0 0
1 1

S20
0 1
0 0

0 1
0 0

S21
0 1
0 0

0 1
0 1

S22
0 1
0 0

0 1
1 0

S23
0 1
0 0

0 1
1 1

S24
0 1
0 1

0 0
0 0

S25
0 1

0 1

0 0
0 1

S26
0 1
0 1

0 0
1 0

S27
0 1
0 1

0 0
1 1

S28
0 1
0 1

0 1
0 0

S29
0 1
0 1

0 1
0 1

S30
0 1
0 1

0 1
1 0

S31
0 1
0 1

0 1
1 1

S32
0 0
1 0

0 0
0 0

S33
0 0
1 0

0 0
0 1

S34
0 0
1 0

0 0
1 0

S35
0 0
1 0

0 0
1 1

S36
0 0
1 0

0 1
0 0

S37
0 0
1 0

0 1
0 1

S38
0 0
1 0

0 1
1 0

S39
0 0
1 0

0 1
1 1

S40
0 0
1 1

0 0
0 0

S41
0 0
1 1

0 0
0 1

S42
0 0
1 1

0 0
1 0

S43
0 0
1 1

0 0

1 1

S44
0 0
1 1

0 1
0 0

S45
0 0
1 1

0 1
0 1

S46
0 0
1 1

0 1
1 0

S47
0 0
1 1

0 1
1 1

S48
0 1
1 0

0 0
0 0

S49
0 1
1 0

0 0
0 1

S50
0 1
1 0

0 0
1 0

S51
0 1
1 0

0 0
1 1

S52
0 1
1 0

0 1
0 0

S53
0 1
1 0

0 1
0 1

S54
0 1
1 0

0 1
1 0

S55
0 1
1 0

0 1
1 1

S56
0 1
1 1

0 0
0 0

S57
0 1
1 1

0 0
0 1

S58
0 1
1 1

0 0
1 0

S59
0 1
1 1

0 0
1 1

S60
0 1
1 1

0 1
0 0

S61
0 1
1 1

0 1
0 1

S62

0 1
1 1

0 1
1 0

S63
0 1
1 1

0 1
1 1

S64
0 0
0 0

1 0
0 0

S65
0 0
0 0

1 0
0 1

S66
0 0
0 0

1 0
1 0

S67
0 0
0 0

1 0
1 1

S68
0 0

0 0

1 1
0 0

S69
0 0
0 0

1 1
0 1

S70
0 0
0 0

1 1
1 0

S71
0 0
0 0

1 1
1 1

S72
0 0
0 1

1 0
0 0

S73
0 0
0 1

1 0
0 1

S74
0 0
0 1

1 0
1 0

S75
0 0
0 1

1 0
1 1

S76
0 0
0 1

1 1
0 0

S77
0 0
0 1

1 1
0 1

S78
0 0
0 1

1 1
1 0

S79
0 0
0 1

1 1
1 1

S80
0 1
0 0

1 0
0 0

S81
0 1
0 0

1 0
0 1

S82
0 1
0 0

1 0
1 0

S83
0 1
0 0

1 0
1 1

S84
0 1
0 0

1 1
0 0

S85
0 1
0 0

1 1
0 1

S86
0 1
0 0

1 1

1 0

S87
0 1
0 0

1 1
1 1

S88
0 1
0 1

1 0
0 0

S89
0 1
0 1

1 0
0 1

S90
0 1
0 1

1 0
1 0

S91
0 1
0 1

1 0
1 1

S92
0 1
0 1

1 1
0 0

S93
0 1
0 1

1 1
0 1

S94
0 1
0 1

1 1
1 0

S95
0 1
0 1

1 1
1 1

S96
0 0
1 0

1 0
0 0

S97
0 0
1 0

1 0
0 1

S98
0 0
1 0

1 0
1 0

S99
0 0
1 0

1 0
1 1

S100
0 0
1 0

1 1
0 0

S101
0 0
1 0

1 1
0 1

S102
0 0
1 0

1 1
1 0

S103
0 0
1 0

1 1
1 1

S104
0 0
1 1

1 0
0 0

S105

0 0
1 1

1 0
0 1

S106
0 0
1 1

1 0
1 0

S107
0 0
1 1

1 0
1 1

S108
0 0
1 1

1 1
0 0

S109
0 0
1 1

1 1
0 1

S110
0 0
1 1

1 1
1 0

S111
0 0

1 1

1 1
1 1

S112
0 1
1 0

1 0
0 0

S113
0 1
1 0

1 0
0 1

S114
0 1
1 0

1 0
1 0

S115
0 1
1 0

1 0
1 1

S116
0 1
1 0

1 1
0 0

S117
0 1
1 0

1 1
0 1

S118
0 1
1 0

1 1
1 0

S119
0 1
1 0

1 1
1 1

S120
0 1
1 1

1 0
0 0

S121
0 1
1 1

1 0
0 1

S122
0 1
1 1

1 0
1 0

S123
0 1
1 1

1 0
1 1

S124
0 1
1 1

1 1
0 0

S125
0 1
1 1

1 1
0 1

S126
0 1
1 1

1 1
1 0

S127
0 1
1 1

1 1
1 1

Κατά συνέπεια, έχουμε 39 κλάσεις:

$S_1, S_2, S_3, S_6, S_7, S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}, S_{18}, S_{19}, S_{20}$

$S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{28}, S_{29}, S_{30}, 3_{31}, S_{48}, S_{49}, S_{50}, S_{51}, S_{54}$

$S_{55}, S_{56}, S_{57}, S_{58}, S_{59}, S_{62}, S_{63}, S_{112}, S_{113}, S_{114}, S_{115}, S_{118}, S_{119}, S_{126}, S_{127}$

Οι 39 κλάσεις δεν είναι ισόμορφες με τις δράσεις της συμμετρικής ομάδας τάξης 3.

Συνοψίζοντας αυτές τις δύο περιπτώσεις που προκύπτουν στη θεωρία των Somas του Καραθεοδωρή, έχουμε τα εξής υπολογιστικά αποτελέσματα:

5 κλάσεις για 2 Somas και 39 κλάσεις για 3 Somas.

Έτσι είναι πλέον δυνατόν να γράψουμε τους τύπους που ήθελε ο Καραθεοδωρή για αυτές τις δύο περιπτώσεις αφού έχουμε μόνο 5 + 39 κλάσεις.

Επιπλέον, οι υπολογιστικές ικανότητες δεν παύουν εδώ. Είναι δυνατόν να μελετήσουμε ακόμα και την επόμενη περίπτωση που εμπεριέχει θεωρητικά 32767 κλάσεις.

Αναφορές

Opus 2778 : Notes sur la décomposition des somas de Carathéodory.
Opus 3425 : Επαλήθευση της απόδειξης του Καραθεοδωρή περί ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της θεωρίας των Somas μέσω της θεωρίας των συνόλων μερικής διάταξης.
Opus 3427 : Η αλγεβροποίηση του Καραθεοδωρή της θεωρίας μέτρου μέσω της θεωρίας συνόλων με μερική διάταξη.
Opus 3567 : Somas του Καραθεοδωρή ως κλάσεις συνόλου.