Η παγκοσμιότητα του π μέσω του Αρχιμήδη

Ν. Λυγερός

Όταν εξετάζουμε τη συμβολή του Αρχιμήδη στην ανακάλυψη του αριθμού π, έχουμε την τάση να την περιορίζουμε στην προσέγγισή του μέσω της μεθόδου των εσωτερικών και εξωτερικών κανονικών πολυγώνων που γενικεύει τη μέθοδο του Ευδόξου. Σίγουρα, η προσέγγιση του αριθμού π μέσω κλασμάτων και πιο συγκεκριμένα η απόδειξη της διπλής ανισότητας: $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$
είναι ήδη σημαντική σε έναν κόσμο που όχι μόνο δεν τη γνώριζε, αλλά δεν προσπαθούσε καν να την υπολογίσει. Σίγουρα, οι υπολογισμοί μέσω πολυγώνου με 96 πλευρές δεν είναι αυτονόητοι. Όμως η συμβολή του Αρχιμήδη είναι ακόμα πιο ουσιαστική όσον αφορά στην παγκοσμιότητα του αριθμού π.

Μία από τις ριζοσπαστικές ιδέες του Αρχιμήδη σε σχέση με το μαθηματικό πλαίσιο των μαθηματικών των προηγούμενων αιώνων ήταν ο έμμεσος τρόπος προσέγγισης του τετραγωνισμού του κύκλου. Ο Αρχιμήδης δεν προσπάθησε να λύσει αυτό το πρόβλημα με τον παραδοσιακό τρόπο, πράγμα το οποίο ήταν αδύνατον όπως το απέδειξε ο Lindemann. Αυτό επέτρεψε να μην ανακοινώσει ένα λάθος ο Αρχιμήδης. Βέβαια, η μη απασχόληση με το πρόβλημα, θα είχε το ίδιο αποτέλεσμα, άρα δεν αποτελεί από μόνο του ένα επιχείρημα.

Στην πραγματικότητα, ο Αρχιμήδης έψαξε να βρει καινούργιες σχέσεις μεταξύ προβλημάτων που δεν είναι απαραίτητα επιλύσιμα. Αυτή η ιδέα έχει την τάση δημιουργίας της έννοιας της ιεραρχίας των προβλημάτων. Σε αυτό το νέο πλαίσιο, ονομάζουμε αντίστοιχα προβλήματα, προβλήματα που έχουν την ίδια πολυπλοκότητα. Με άλλα λόγια, υπάρχει θεωρητικό μονοπάτι που τα συνδέει δίχως αυτό να υπονοεί κάτι όσον αφορά στην επιλυσιμότητά τους. Με αυτόν τον τρόπο, ο Αρχιμήδης ανακάλυψε σωστές αντιστοιχίες στις οποίες δεν δίνουμε σημασία στη διδακτική ενώ γνωρίζουμε τη σημαντικότητά τους στην ιστορία των μαθηματικών. Πιο βαθιά ακόμα ή μάλλον πιο θεμελιακά τουλάχιστον για τη φιλοσοφία των μαθηματικών, ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε το ίδιο νοητικό σχήμα για να αναδείξει την παγκοσμιότητα του αριθμού π στο χώρο των κωνικών τομών.

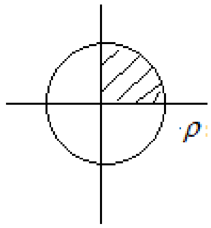
Ας εξετάσουμε πιο συγκεκριμένα αυτό το νοητικό σχήμα μέσω γεωμετρικών παραδειγμάτων. Με τη σύγχρονη ορολογία και συμβολισμό, έχουμε τα εξής.
Έστω ένας κύκλος ακτίνας ρ.
Η περίμετρός του είναι: $2\pi\rho$ και το εμβαδόν του: $\pi\rho^2$.
Βέβαια όταν γνωρίζουμε αυτούς τους τύπους, δεν σημαίνει ότι τους κατανοούμε διότι στην ουσία δεν τους επινοήσαμε.

Η παρατήρηση του Αρχιμήδη είναι η εξής:

$$2\pi\rho \xrightarrow[\frac{\rho}{2}]{} \pi\rho^2$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μετασχηματισμός ανεξάρτητος του αριθμού π. Αλλά όχι μόνο! Διότι υπάρχει και η γραμμική παρουσία του αριθμού π στους δύο τύπους. Με άλλα λόγια, όταν κοιτάζουμε τον κύκλο και το δίσκο, βλέπουμε την παγκοσμιότητα του π και μάλιστα με απλό τρόπο.

Μέσω των ολοκληρωμάτων αυτό γίνεται ακόμα πιο κατανοητό.



$$I=\int_0^{\rho}\sqrt{\rho^2-x^2}dx \quad x=\rho\cos\theta \quad \text{άρα} \quad dx=-\rho\sin\theta d\theta$$

$$I=-\rho\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{\rho^2-\rho^2\cos^2\theta}\sin\theta d\theta=\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho\left(\sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta d\theta\right)$$

$$I=\rho^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\sin\theta d\theta=\rho^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta$$

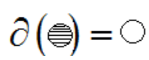
Όμως $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

$$I=\frac{\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\cos 2\theta]d\theta=\frac{\rho^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta\right)$$

$$I=\frac{\rho^2}{2}\left([\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

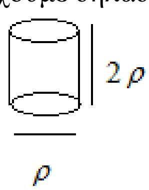
$$I=\rho^2\frac{\pi}{4} \quad \text{όπως} \quad 4I=\pi\rho^2 \quad \square$$

Βέβαια πιο τεχνικά, αλλά ισοδύναμα στην ουσία: $\dfrac{\partial\pi\rho^2}{\partial\rho}=2\pi\rho$

Άρα σχηματικά έχουμε: 

Το ανάλογο μπορεί να γίνει με τον κύλινδρο, με τη σφαίρα και την επιφάνειά της.

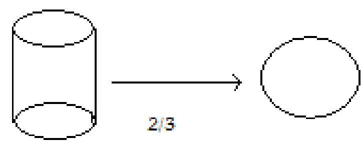
Έχουμε δηλαδή:



$$(\pi\rho^2)(2\rho)=K$$

$$\Sigma=\frac{4}{3}\pi\rho^3 \qquad \text{άρα} \qquad \frac{\Sigma}{K}=\frac{2}{3}$$

Ο αριθμός π βρίσκεται και στις δύο γεωμετρικές οντότητες.



Άρα έχουμε: □

Σε αυτό το νοητικό σχήμα, είναι η ουσία της συμβολής του Αρχιμήδη για την παγκοσμιότητα του αριθμού π.