Ο χώρος Hilbert ως μαθηματική θεμελίωση της κβαντομηχανικής

Ν. Λυγερός

Οι κυματοσυναρτήσεις της κβαντικής μηχανικής ερμηνεύονται ως στοιχεία του χώρου Hilbert. Η θεμελίωση αυτή ανήκει στο γενικό πρόγραμμα του Hilbert όσον αφορά στην αξιωματική προσέγγιση κάθε θεωρίας. Την ίδια μεθοδολογία χρησιμοποίησε και για τη θερμοδυναμική όπου τον ακολούθησε ο Καραθεοδωρή μέσα από την προτροπή του Bohr. Η κλασική θεμελίωση αρχίζει με τους χώρους πεπερασμένων διαστάσεων. Διότι δύο μόνο αξιώματα επαρκούν ως βάση. Ο χώρος Hilbert είναι ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών. Ο χώρος Hilbert έχει την ιδιότητα του βαθμωτού γινομένου διανυσμάτων. Αυτή η ιδιότητα είναι απαραίτητη για τον πολλαπλασιασμό κυματοσυναρτήσεων που θα έχει ως αποτέλεσμα ένα μιγαδικό αριθμό. Ο ορισμός του βαθμωτού γινομένου διανυσμάτων επιτρέπει την ύπαρξη της έννοιας της κανονικής τιμής του διανύσματος

$$\left\| |a\rangle \right\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

Για την κανονική τιμή ισχύει η ανισότητα του Schwartz

$$\left\| |a\rangle \right\| \left\| |b\rangle \right\| \geq \left| \langle a|b\rangle \right|$$

Στην κβαντομηχανική χρειαζόμαστε ένα άπειρο αριθμό διανυσμάτων. Κατά συνέπεια ο χώρος Hilbert πρέπει να έχει άλλες δύο ιδιότητες για τη μαθηματική θεμελίωση. Έτσι ο χώρος Hilbert πρέπει να είναι συμπαγής. Με αυτόν τον τρόπο για κάθε κυματοσυνάρτηση υπάρχει τουλάχιστον μία γειτονική κυματοσυνάρτηση, όσο κοντινή θέλουμε. Με άλλα λόγια

$$\forall |a\rangle, \exists \left\{ |a_n\rangle \right\}_{n\in\mathbb{N}} / \left\| |a\rangle - |a_n\rangle \right\| < \varepsilon$$

Ο χώρος Hilbert έχει μία επιπλέον ιδιότητα, την πληρότητα. Κάθε κυματοσυνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί με όποια ακρίβεια θέλουμε από μία ακολουθία κυματοσυναρτήσεων.

Ισχύει λοιπόν: $\lim_{n\to\infty} \left\| |a\rangle - |a_n\rangle \right\| = 0$

Αυτά τα τέσσερα αξιώματα είναι όλα απαραίτητα για την θεμελίωση της κβαντομηχανικής διότι κανένα δεν μπορεί να αποδειχθεί με τα άλλα τρία. Ο χώρος Hilbert μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε τους όρους διάνυσμα και κυματοσυνάρτηση. Μία κυματοσυνάρτηση της κβαντομηχανικής δεν είναι παρά ένα διάνυσμα χώρου Hilbert δηλαδή ενός διανυσματικού χώρου πάνω στους μιγαδικούς, ο οποίος έχει βαθμωτό γινόμενο και είναι συμπαγής και πλήρης. Μέσα στον χώρο Hilbert μπορούν να ζήσουν πολλά διαφορετικά ορθοκανονικά συστήματα δηλαδή σύνολα διανυσμάτων που έχουν την εξής ιδιότητα.

Έστω $\left\{ | f_n \rangle \right\}$ έχουμε $\langle f_n | f_m \rangle = \delta_{nm}$ όπου δ_{nm} είναι το σύμβολο δ του Kronecker.

Η σημαντικότητα των ορθοκανονικών συστημάτων εκφράζεται με τις αναπαραστάσεις. Κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή:

$| f \rangle = \sum_n a_n \left\{ | f_n \rangle \right\}$ όπου $\left\{ | f_n \rangle \right\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα.

Έτσι μπορούμε να αντιληφθούμε ότι οι συντελεστές a_n υπολογίζονται μέσω του βαθμωτού γινομένου διανυσμάτων.

$$\langle f_m | f \rangle = f_m \sum_n a_n | f_n \rangle = \sum_n a_n \langle f_m | f_n \rangle$$

$$\langle f_m \mid f \rangle = \sum_n a_n \delta_{nm} = a_m$$

Άρα όντως:

$$a_m = \langle f_m \mid f \rangle$$

Τώρα έχουμε όλα τα απαραίτητα εφόδια για να ορίσουμε το συμβολισμό του Dirac.

$$\psi(x) \leftrightarrow |\psi\rangle$$

$$\psi^*(x) \leftrightarrow \langle\psi|$$

Άρα:

$|\psi\rangle^* = \langle\psi|$ και $\langle\psi\rangle^* = |\psi\rangle$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx \leftrightarrow \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$

$$\int \psi_m^*(\vec{r})\psi_n^*(\vec{r})dr = \delta_{mn} \leftrightarrow \langle\psi_m|\psi_n\rangle = \delta_{mn}$$

Κατά συνέπεια, ο συμβολισμός του Dirac για τους τελεστές θα είναι ο εξής:

$$\langle A\rangle = \int \psi^* \hat{A}\psi^* dr \leftrightarrow \langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$