Καταγραφή της επιστολής του Κ. Καραθεοδωρή στον A. Einstein (16/12/1916)
Transcription de la lettre de C. Carathéodory à A. Einstein (16/12/1916)

Ν. Λυγερός

Göttingen den 16.12.16
Friedländern. 31

Lieber Herr Kollege,
Die Hauptsache in der Theorie der kanonischen Substitutionen, kann man m. E. am einfachsten folgundermassen ableiten. Ist

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}\left(x_k, \dot{x}_k, t\right) dt$$

das Hamiltonsche Integral und setzt man

$$(2) \qquad y_k = \mathcal{L}_{\dot{x}_k} \qquad \mathcal{H}\left(x_k, y_k, t\right) = -\mathcal{L} + \sum_k y_k \dot{x}_k \quad \left(k = 1, \ldots, n\right)$$

so lauten die Differentialgleichungen der Mechanik

$$(3) \qquad \dot{x}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_k} \qquad \dot{y}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

So sein

$$(4) \qquad x_k = \overline{x_k}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, t) \qquad y_k = \overline{y_k}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, t)$$

das allgemeine Integral von (3) und $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ Integrationskonstanten

Ich setze

$$(5) \qquad \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}\left(\overline{x_k}, \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t}, t\right) dt = \overline{\Omega}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, t\right)$$

oder, wenn ich die α_j aus (4) als Funktionen von x_k, y_k betrachte

$$\overline{\Omega}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, t\right) = \Omega\left(x_k, y_k, t\right)$$

Ähnlich schreibe man

$$\overline{\mathcal{H}}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, t\right) = \mathcal{H}\left(\overline{x_k}, \overline{y_k}, t\right)$$

dann ist (mit Hülfe von (3) und (4))

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \alpha_j} = \sum\limits_k \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \dfrac{\partial \overline{x_k}}{\partial \alpha_j} + \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_k} \dfrac{\partial \overline{y_k}}{\partial \alpha_j} = \sum\limits_k -\dfrac{\partial \overline{y_k}}{\partial t} \dfrac{\partial \overline{x_k}}{\partial \alpha_j} + \dfrac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} \dfrac{\partial \overline{y_k}}{\partial \alpha_j} \\ = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum\limits_k \overline{y_k} \dfrac{\partial \overline{x_k}}{\partial t}\right) - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sum\limits_k \overline{y_k} \dfrac{\partial \overline{x_k}}{\partial \alpha_j}\right) \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\sum \overline{y_k} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} - \overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{L}\left(\overline{x_k}, \overline{y_k}, y\right) = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t}$$

Statt (6) kann man also schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_k \overline{y_k} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \alpha_j \partial t}$$

und hieraus folgt

$$\sum_k \overline{y_k} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \alpha_j} + A_j\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}\right) \quad \left(j = 1, \ldots, n\right)$$

Fügt man zu diesen n Gleichungen noch

$$\sum_k \overline{y_k} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} + \overline{\mathfrak{H}}$$

hinzen, so sind sie äquivalent mit der Gleichung

$$(7) \quad \sum \overline{y_k}\, d\, \overline{x_k} = d\, \overline{\Omega} + \sum A_j d\alpha_j + \overline{\mathcal{H}} dt$$

Umgekehrt folgen aber aus (7) die kanonischen Differentialgleichungen; aus (7) folgt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \overline{y_k} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \alpha_j \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum \overline{y_k} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \alpha_j \partial t} + \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \alpha_j}$$

---

und hieraus

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \alpha_j} = \sum_k \frac{\partial \overline{y_k}}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial \alpha_j} \frac{\partial y_k}{\partial t} \quad \left(k = 1, \ldots, n\right)$$

Diese letzen Gleichungen in Verbindung mit der Identität

$$0 = \sum_k \frac{\partial \overline{y_k}}{\partial t} \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} \frac{\partial \overline{y_k}}{\partial t}$$

können geschrieben werden :

$$d\overline{\mathfrak{H}} = \sum_k \frac{\partial \overline{x_k}}{\partial t} d\, \overline{y_k} - \frac{\partial \overline{y_k}}{\partial t} d\, \overline{x_k} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{H}}}{\partial t} dt$$

woraus die kanonischen Differentialgleichungen ohne weiteres zu, entnehmen sind.
Es gibt also der der Satz :
Die Funktionen (4) sind Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen , jedermal, wo ein Gleichung

$$(8) \quad \sum_k y_k dx_k = d\Omega + \sum_j A_j d\alpha_j + \mathfrak{H} dt$$

gibt, in der $d\Omega$ ein totales differential und die A_j von t

unabhängig sind.
Aus diesen Satz folgt alles übrige sofort:
I kanonische Transformationen So sein die neuen Veränderlichen

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi_k = \xi_k\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t\right) \\ \eta_k = \eta_k\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t\right) \end{cases}$$

derart, dass eine Funktion $\Psi\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,t\right)$ existiert, für welches

$$(10)\qquad \sum_k \left(\eta_k d\xi_k - y_k dx_k\right) = d\Psi + \mu\left(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k,t\right)dt$$

---

identisch er füllt ist Dann hat man nach (8), wenn man für x_k, y_k die allgemeine Lösung von (3) einsetzt

$$(11)\ \sum_k \eta_k d\xi_k = d\left(\Omega+\Psi\right) + \sum_j A_j d\alpha_j + \left(\mathcal{H}+\mu\right)dt$$

und daher, wenn man ξ_k, y_k und als unabhängige Veränderlichen einführt und

$$H\left(\xi_k,\eta_k,t\right) = \mathcal{H}\left(x_k,y_k,t\right) + \mu\left(x_k,y_k,t\right)$$

setzt, transformieren sich die Gleichungen (3) in

$$(11)\qquad \dot{\xi}_k = \frac{\partial H}{\partial \eta_k} \qquad \dot{\eta}_k = -\frac{\partial H}{\partial \xi_k}$$

II Kann man die y_k aus den η ersten Gleichungen (9) eliminieren und folglich x_k, ξ_k als unabhängige Veränderliche wählen und schreibt man

$$(12)\ \Psi\left(x_k,y_k,t\right) = -\phi\left(\xi_k,x_k,t\right)$$

so folgt aus (10)

$$(13)\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi_k} = -\eta_k, \frac{\partial\phi}{\partial x_k} = +y_k, \frac{\partial\phi}{\partial t} = \mu$$

Ist umgekehrt $\phi\left(x_k,\xi_k,t\right)$ eine beliebige Funktion und kann man aus den ersten Gleichungen (13) die x_k aus den mittleren Gleichungen (13) die

[ξ_k eliminieren, so liefern

die Gleichungen (13) eines kanonische Transformation für welche

$$(14)\ H = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathcal{H}$$

III Jacobische Integrationsmethode ist ϕ eine Lösung der Jacobischen

---

partiellen Differentialgleichung, so ist nach (14)
H=0
und noch (11) für die Lösungen in den neuen Koordination
$\xi_k = Konst \qquad \eta_k = Konst$
Die ganze Theorie ist also eine Folge der Transformation, die zu der Gleichung (8) geführt hat.
Vergleichen Sie übrigens die Darstellung bei Whittakers Analytical

Dynamics p. 232 u.f.

Mit besten Gruss
Ihr sehr ergebener
C. Carathéodory