

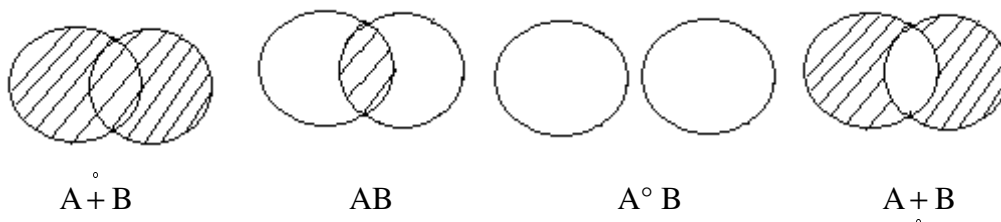
## Le point de vue de Carathéodory sur la théorie de la mesure

N. Lygeros

En s'inspirant du point de vue algébrique de George Boole, Constantin Carathéodory a introduit le thème des somas pour étudier en profondeur la théorie de la mesure et de l'intégration. Conscient de la possibilité d'exploiter la mesure de Borel-Lebesgue de manière classique, il n'a pas moins emprunté une autre voie de présentation des résultats de la théorie. Cette attitude ne représente pas seulement une approche historique. Via cette nouvelle axiomatisation, Constantin Carathéodory met en évidence des relations plus profondes. Cela conduit à une présentation de la théorie certes algébrique mais de plus extrêmement élémentaire en raison de son organisation. Quant à la mise en place de l'axiomatique, elle se fonde non pas sur celle de Boole mais de Stone. La méthode axiomatique permet d'unifier les aspects formels similaires qui utilisent des théories pourtant très diverses qui gèrent des entités encore plus variées. Pour cela il ne se sert pas de la théorie des espaces multidimensionnels développée par Hermann Grassman et la théorie générale des ensembles de Georg Cantor comme nous le faisons classiquement mais il reprend l'approche d'Euclide à la base en remarquant que ses résultats sont en accord avec la théorie moderne de la mesure. Aussi la difficulté provient de la confusion qui existe sur le choix de l'appartenance des points à des figures associées.

Si les somas  $A$  et  $B$  sont disjoints, il note  $A \overset{\circ}{\cap} B$  et  $A+B$  sinon, et il introduit le soma vide  $0$ , tel que  $0 \overset{\circ}{\cap} A$  et  $0+A=A$  pour tout soma.

L'union des somas est notée  $\overset{\circ}{+}$  et la conjonction  $\overset{\circ}{\cap}$  quant à l'intersection il utilise le produit. Ces opérations sont toutes commutatives et associatives.



Ainsi les premiers théorèmes qu'il obtient sont les suivants :

**Théorème** : L'équation  $X \overset{\circ}{+} A = B$  a toujours une et une seule solution  $X=A \overset{\circ}{+} B$

**Théorème** : Les trois relations  $A \overset{\circ}{\cap} B$ ,  $AB=0$  et  $A \overset{\circ}{+} B=A \overset{\circ}{+} B$  sont équivalentes et chacune d'entre elles implique la relation

$$A \overset{\circ}{+} B = A \overset{\circ}{+} B = A \overset{\circ}{+} B.$$

Ensuite en interprétant les somas comme des éléments d'une algèbre de Boole, il explicite ses axiomes qui font aboutir la relation de conjonction à un groupe abélien, la combinaison de l'intersection avec la conjonction à un anneau et l'intersection à une relation idempotente ; il crée ainsi des anneaux idempotents.