Hypermandelbrot

N. Lygeros

Notations :

$D(r)=\{z\in\mathbb{C}/|z|\le r\}, r\in\mathbb{R}^+$

Σ la sphère de Riemann $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

$M_n=\{c\in\mathbb{C}/z_n=F^n_{c,m}(0)\not\to\infty\ \ lorsque\ \ n\to\infty\}$

avec $F_{c,m}$ l'application $z\to z^m+c$, $\{m\in\mathbb{R}, m\ge 1\}$ et où les angles sont toujours considérés à partir de leur mesure principale.

Introduction :

Dans un article précédent [1] (voir [2] pour une version résumée) nous avons établi un théorème de double inclusion sur les ensembles de Mandelbrot généralisés (M_m). En corollaire on obtient la dimension de Hausdorff de ces derniers ; elle est égale à 2 pour *m>1* (car M_m contient toujours un disque). Ainsi cette dimension ne permet pas de les caractériser.

A partir d'une généralisation naturelle du théorème de H. Brolin [3] on peut montrer que pour*m>1* : $M_n=\{c\in\mathbb{C}/0\in K_{c,m}\}$ où $K_{c,m}$ est le Julia rempli et $m\in\mathbb{N}$, et de celle du théorème de A. Douady et J.H. Hubbard [4] que pour $m\in\mathbb{N}$ et *m>1* : M_m est connexe. De plus on obtient de par la méthode même de cette dernière démonstration la construction d'un homéomorphisme analytique : $\psi:\Sigma\setminus D(1)\to\Sigma\setminus M_n$ tangent à l'identité en ∞. Et l'on ne peut guère obtenir mieux (car les M_m contrairement au disque unité ont des points doubles qui sont les points de contacts de leurs composantes hyperboliques, et même une infinité).

Un élément d'explication des propriétés communes que possèdent les M_m est le suivant : les M_m ont tous un seul point critique, l'origine (un point critique d'une fonction est l'endroit où s'annule sa dérivée, ici dans le sens complexe).

A partir de ces différentes considérations nous avons eu l'idée de synthétiser toutes les informations sur les M_m en introduisant un nouvel être mathématique :

l'Hypermandelbrot, que l'on notera $\mathcal{M}$.

Construction de l'Hypermandelbrot :

Chaque M_m appartient au plan complexe, par définition. Conservons de cela uniquement l'aspect géométrique c'est-à-dire l'appartenance de M_m à un plan. Nous montrons ensuite la continuité entre M_α et M_β pour α et β infiniment voisins grâce au choix de l'argument principal des angles dans la définition des M_m. Comme à chaque m correspond un seul M_m, nous pouvons empiler les plans auxquels appartiennent les M_m suivant l'ordre indique par m. Nous obtenons alors un objet dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ que nous appelons l'Hypermandelbrot. (Important : l'Hypermandelbrot est défini non pas dans $\mathbb{R}^3$ mais bien dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$. Nous insistons sur ce point car l'interprétation des axes n'est pas la même. Par exemple, l'un d'entre eux représente l'axe des paramètres et donc n'est pas équivalent aux deux autres). Ainsi les M_m peuvent à présent être considérés comme des sections de l'Hypermandelbrot, perpendiculaires à l'axe des paramètres.

De la définition de l'Hypermandelbrot on déduit immédiatement les propriétés suivantes : il est infini, sa dimension de Hausdorff est 3, et surtout il est fractal. De la même façon que l'on considère l'ensemble de Mandelbrot comme le dictionnaire des ensembles de Julia, on peut considérer que l'Hypermandelbrot est l'encyclopédie des ensembles de Mandelbrot généralisés.

Conjecture : La dimension de Hausdorff de ($\overline{\mathcal{M}} - \mathring{\mathcal{M}}$) est égale à 3.

Remarque : Cette conjecture généralise en quelque sorte celle sur la frontière de l'ensemble de Mandelbrot. Cependant la difficulté est rendue plus grande par l'absence de structure algébrique – simple en tout cas – dans l'espace de l'Hypermandelbrot.

Questions :

– comment interpréter « algébriquement » une image obtenue sur une section (plane) non perpendiculaire à l'axe du paramètre *m* ?

– comment obtenir une caractérisation intrinsèque de $\mathcal{M}$?

Références :

[1] N. Lygeros : *Théorème de double inclusion sur les ensembles de Mandelbrot généralisés*. Singularité N°4 (1990/2450), p.10-17.
[2] N. Lygeros : *Itération de fonctions complexes* $z \to z^m + c$. CRAS Paris t.311 (1990), p.689-690.
[3] H. Brolin : *Invariant sets under iteration of rational functions*. Arkiv Math. 6 (1965) p103-144.

[4] A. Douady, J.H. Hubbard : *Itération des polynômes quadratiques complexes*. CRAS Paris t.294 (1982), p.123-126.

Bibliographie :

G. CHERBIT : *Fractals*. Masson 1987.
K. FALCONER : *Fractal geometry, Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons 1990.
M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO : *Fonctions d'une variable complexe et leurs applications*. Editions Mir 1985.