L'operateur kappa

N. Lygeros

(en hommage au non-conformisme de Pierre Kuentz)

(Introduction of a new operator)

Introduction

L'opérateur Kappa, que l'on notera K, est un symbole qui permet de rendre compte d'un système récursif utilisant l'opérateur sigma que l'on note K.
Soit $f_p(k)$, une fonction à variable et à valeur entières, paramétrée par un entier p.

Notations

$$\left[f_0(k), f_1(k), ..., f_m(k)\right] = \left[f_p(k)_0^m\right]$$
$$\left[f(k), f(k), ..., f(k)\right] = \left[f(k)\right]$$

L'opérateur Kappa admet un sigma principal, à partir duquel on définit ses bornes. La structure de l'opérateur est asymétrique par rapport au signal principal.

On a donc :

$$\sum_{b\begin{cases} k=\sum\limits^{n} f_{b-1}(k)\\ \vdots \\ k=\sum\limits_{k=0}^{n} f_0(k)\end{cases}}^{a\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n} f_m(k)\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=0} f_{b+1}(k)\end{cases}} f_b(k) = \mathrm{K}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\left[f_0(k), f_1(k), \ldots, f_m(k)\right] = \mathrm{K}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\left[f_p(k)_0^m\right]$$

où a, b indiquent respectivement le nombre de sigmas à la borne supérieur et à la borne inférieure $(a,b) \in \mathbb{N}$

$f_p(k) = pk$. Calculons $\mathrm{K}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\left[pk_0^4\right]$:

$$\mathrm{K}\binom{2}{2}\left[pk_0^4\right]=\sum_{k=\sum\limits_{k=\sum\limits_{k=0}^{n}6k}^{n}1k}^{\sum\limits_{k=0}^{\sum\limits_{k=0}^{n}4k}3k} 2k=\sum_{k=\sum\limits_{k=0}^{n}1k}^{\sum\limits_{k=0}^{2n(n+1)}3k} 2k=\sum_{k=n(n+1)/2}^{3n(n+1)(2n(n+1)+1)} 2k$$

$$\mathrm{K}\binom{2}{2}\left[pk_0^4\right]=\left(6n^4+12n^3+\frac{19}{2}n^2+\frac{7}{2}n\right)\left(6n^4+12n^3+\frac{12}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\right)$$

Remarque

- Les problèmes d'existence de l'opérateur Kappa proviennent des sigmas de la borne inférieure du sigma principal, et ne semblent pas résolvables dans le cas général.
- L'avantage de l'opérateur K est la compacité de l'écriture
- Le K habituel s'écrit $\mathrm{K}\binom{0}{0}\left[f(k)\right]=\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$
- $\mathrm{K}\binom{1}{1}\left[f(k)\right]=f\left\{K\binom{0}{0}\left[f(k)\right]\right\}$
- $\mathrm{K}\binom{a}{0}[1]=n+a+1$
- $\mathrm{K}\binom{a+1}{0}\left[f(k)\right]=\sum\limits_{k=0}^{K\binom{a}{0}\left[f(k)\right]} f(k)$
- <u>Corollaire</u> : $K\binom{a+1}{0}\left[q^k\right]=\dfrac{1-q^{K\binom{a}{0}[q]^k+1}}{1-q}$